

# 数 学 (120 分)

(令和 6 年度 前期日程)

## 注 意 事 項

問 題 冊 子	解 答 用 紙
<ol style="list-style-type: none"><li>1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけない。</li><li>2. 問題冊子は全部で9ページである。表紙を開くと白紙があり、その裏が1ページ目である。不鮮明な印刷、ページの脱落に気付いたときは、試験監督者に申し出ること。</li><li>3. 問題冊子は持ち帰ること。</li></ol>	<ol style="list-style-type: none"><li>1. すべての解答用紙に受験番号、氏名を記入すること。記入を忘れたとき、あるいは誤った番号を記入したときは失格となることがある。</li><li>2. 解答用紙の枚数は、5枚である。</li><li>3. 解答は、問題番号と同じ番号の解答用紙の表面に記入すること。なお、解答は答えだけでなく途中の計算も記入すること。</li></ol>

1 (50点)

3次関数  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x + a$  について、次の問いに答えよ。ただし、 $a$  は定数とする。

(1)  $a = \frac{2}{3}$  のとき、 $y = f(x)$  のグラフをかけ。

(2)  $0 \leq a < 2$  のとき、区間  $-\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}$  における  $|f(x)|$  の最大値を  $a$  を用いて表せ。

また、そのときの  $x$  の値を求めよ。

注意：以下の余白、および右ページは計算用である。解答は、解答用紙に記入せよ。



2 (50点)

$a$  を正の実数とする。関数  $y = ax^2 + a^3$  のグラフを  $C_1$ 、関数  $y = ax^2$  のグラフを  $C_2$  とする。このとき、次の問いに答えよ。

- (1)  $C_1$  上の点  $P(p, ap^2 + a^3)$  における接線を  $l$  とする。 $l$  の方程式を求めよ。
- (2)  $l$  は、 $C_2$  と 2 点  $A, B$  で交わる。 $P$  は線分  $AB$  の中点であることを示せ。
- (3)  $C_2$  と  $l$  が囲む図形の面積を  $S$  とする。 $S$  を  $a$  を用いて表せ。

注意：以下の余白、および右ページは計算用である。解答は、解答用紙に記入せよ。



3 (50点)

$\triangle OAB$  において、 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$  とするとき、次の問いに答えよ。

(1)  $\angle AOB = \theta$  とおく。 $\cos \theta$  を  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  を用いて表せ。

(2) (1) の結果を利用して、原点  $O$  と  $A(a_1, a_2)$ ,  $B(b_1, b_2)$  を頂点とする  $\triangle OAB$  の面積  $S$  は

$$S = \frac{1}{2} |a_1 b_2 - a_2 b_1|$$

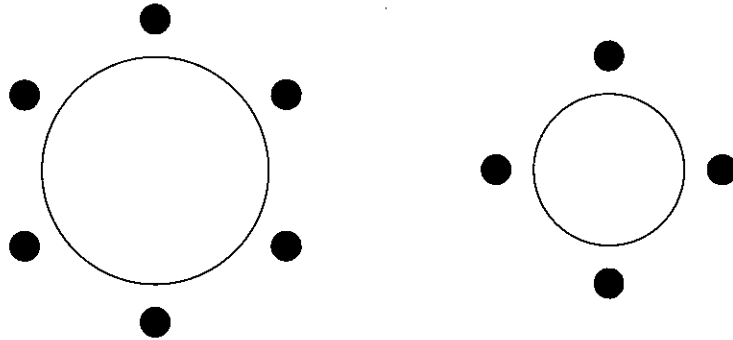
と表されることを証明せよ。

注意：以下の余白、および右ページは計算用である。解答は、解答用紙に記入せよ。



4 (50点)

図のように、6人が向かって座れる大きな円形のテーブルと、4人が向かって座れる小さな円形のテーブルがある。このとき、次の問いに答えよ。



- (1) 6人の男子と4人の女子がくじ引きで座席を決めるとき、小さな円形のテーブルにすべて男子が座る確率を求めよ。
- (2) 男子と女子それぞれ5人ずつがくじ引きで座席を決めるとき、どちらのテーブルも男子と女子が交互に座る確率を求めよ。

注意：以下の余白、および右ページは計算用である。解答は、解答用紙に記入せよ。





5 (50点)

数列  $\{a_n\}$  の一般項が

$$a_n = 1^n + 2^n + 3^n + 4^n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

であるとき、次の問いに答えよ。

- (1)  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$  の値をそれぞれ求めよ。
- (2)  $a_n$  が 10 の倍数になるための  $n$  の条件を推定し、その推定が正しいことを数学的帰納法を用いて証明せよ。

注意：以下の余白、および右ページは計算用である。解答は、解答用紙に記入せよ。